

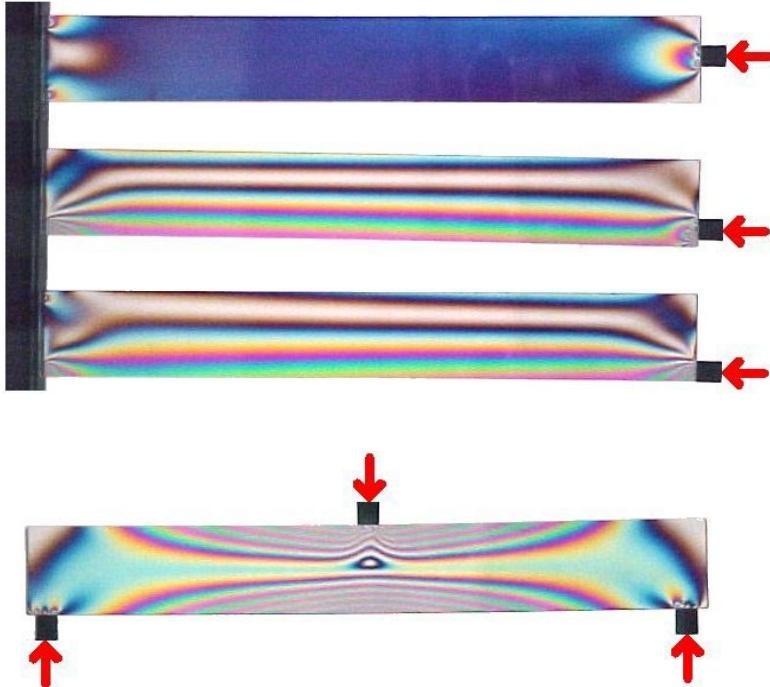
# Au-delà de la résistance des matériaux

1

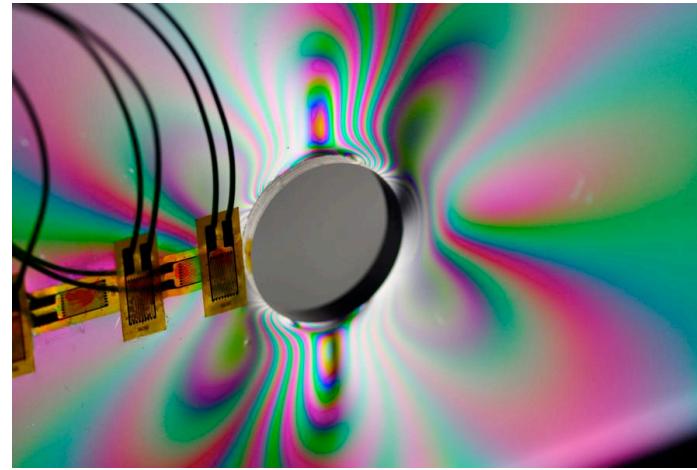
- Méthodes pour aborder certaines structures complexes
- Concentrations des contraintes
- Limites de l'élasticité (plasticité, flambage ...)
- Critères de ruptures



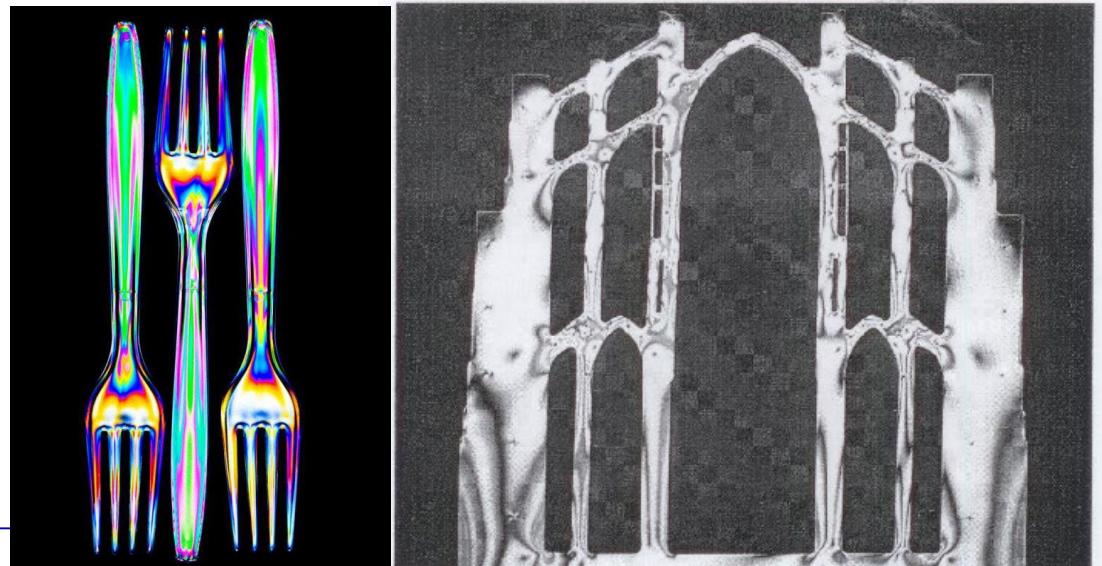
# Applications des charges, géométries... via la photoélasticité



[http://classes.mst.edu/civeng50/lessons/12/  
photoelasticity/index.html](http://classes.mst.edu/civeng50/lessons/12/photoelasticity/index.html)



<http://www.engineeringafuture.com/2015/08/24/stress-concentrations/>



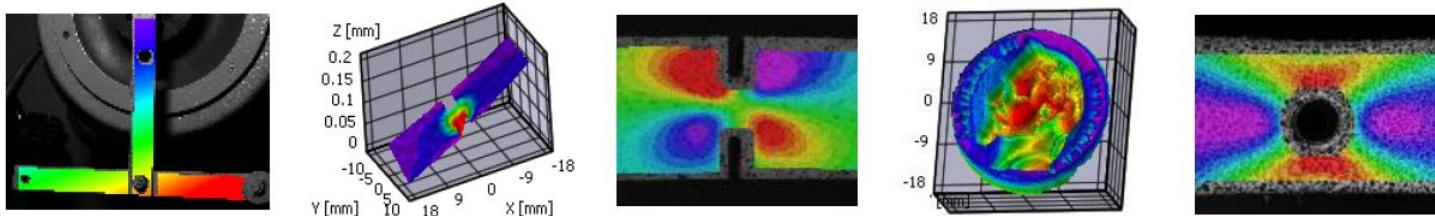
[http://www.philcawdellphotography.com/  
\\_photo\\_9636795.html](http://www.philcawdellphotography.com/_photo_9636795.html)

# Mesures par corrélation d'images

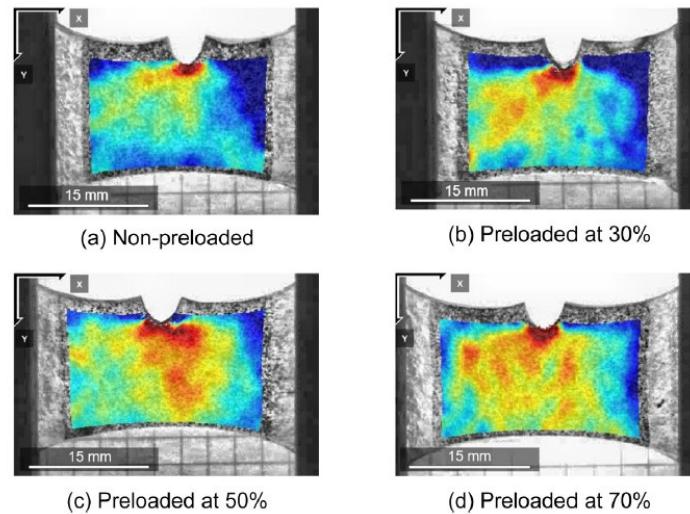
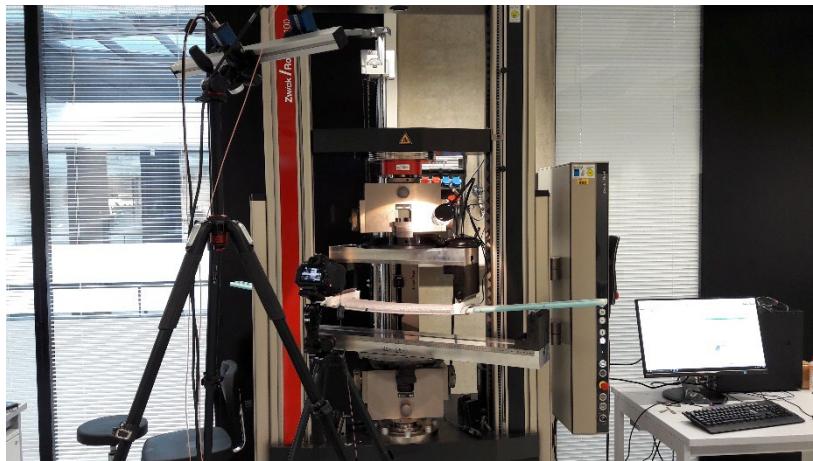
## DIC (Digital Image Correlation)

[www.kiloneutron.fr](http://www.kiloneutron.fr)

VIC-SNAP, VIC-2D et VIC-3D sont développés par Correlated Solutions Inc. : [www.correlatedsolutions.com](http://www.correlatedsolutions.com)



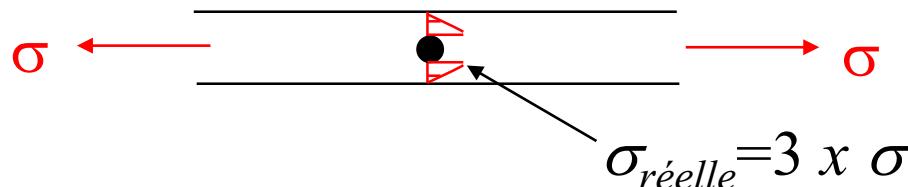
C.S. Wyss et al. / Extreme Mechanics Letters 24 (2018) 66–74



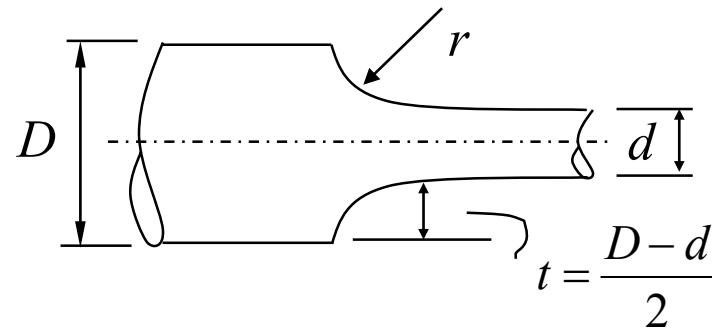
# Concentrations de contraintes

4

Les accidents de forme sur une pièce (filetage, trou, etc.) génèrent des contraintes réelles supérieures aux contraintes maximales de la pièce sans accidents de forme



Facteur théorique de concentration de contraintes  $k = \sigma_{\max \text{ réelle}} / \sigma_{\max \text{ nominale}}$



		$d/D$	
	$r/t$	0.5	0.8
<b>en extension</b>	0.1	2.8	(3.3)
	1	1.3	1.6
<b>en flexion</b>	0.1	2.1	3
	1	1.2	1.5
<b>en torsion</b>	0.1	1.6	2.3
	1	1.1	1.3

$$\sigma_{réelle} = 3,3 \sigma_{nominale}$$

$k \uparrow$  avec  $d/D \uparrow$

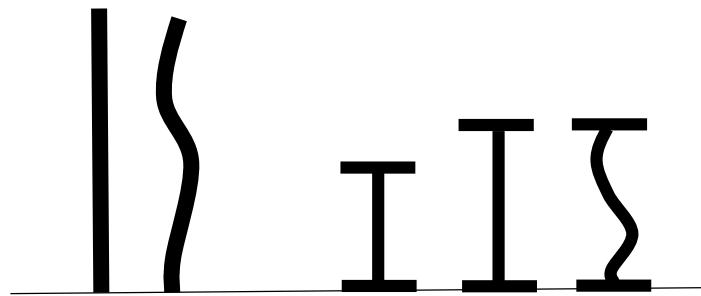
$k \downarrow$  avec  $r/t \uparrow$

Valeurs de  $k$

# Flambage

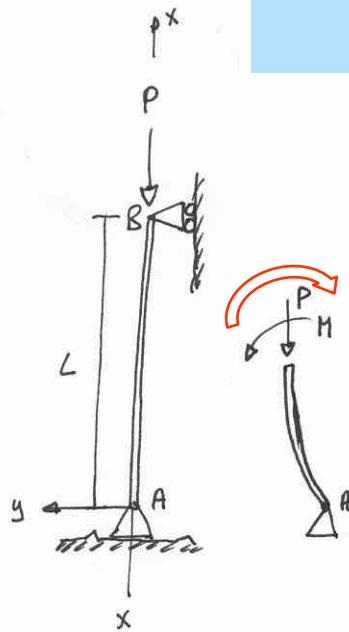
5

*Systèmes élastiquement instables*



# Flambage

6



$$EIy'' = -M$$

$$M = +P_y$$

$$EIy'' + P_y = 0$$

$$\text{avec } k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \textcircled{1}$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1 \sin kx \quad \textcircled{2}$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin kL = 0$$

$$\text{si } C_1 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ colonne stable}$$

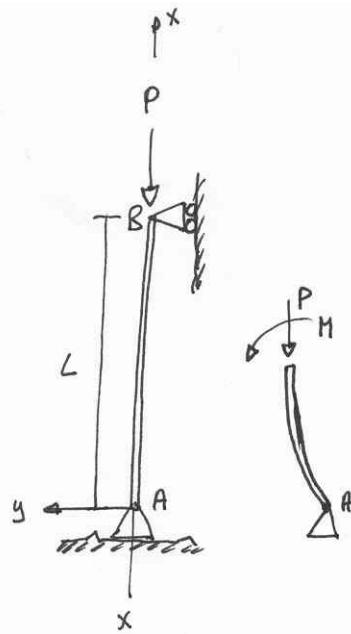
$$\text{si } \sin kL = 0 \Rightarrow kL = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

$$kL = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ pas d'intérêt}$$

$$\text{donc } kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

# Flambage

7



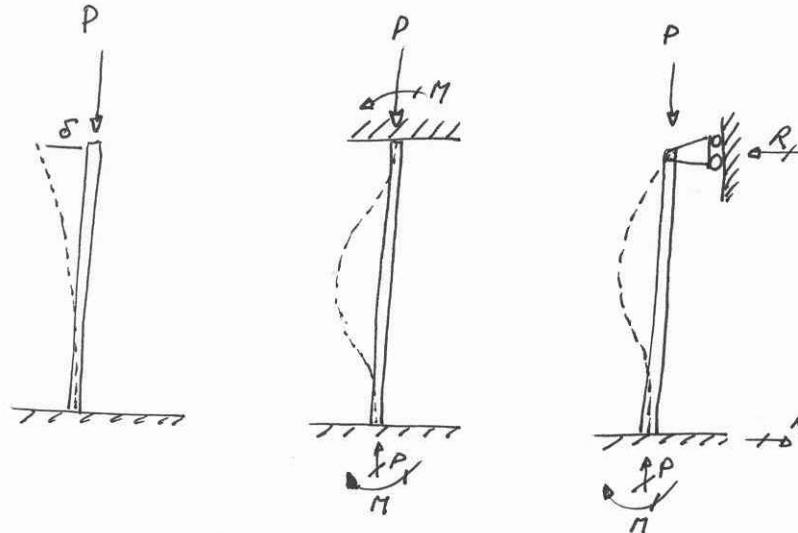
$$\text{donc } kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$n=1 \Rightarrow \text{Portique} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\text{Toristique} = \frac{\text{Portique}}{S}$$

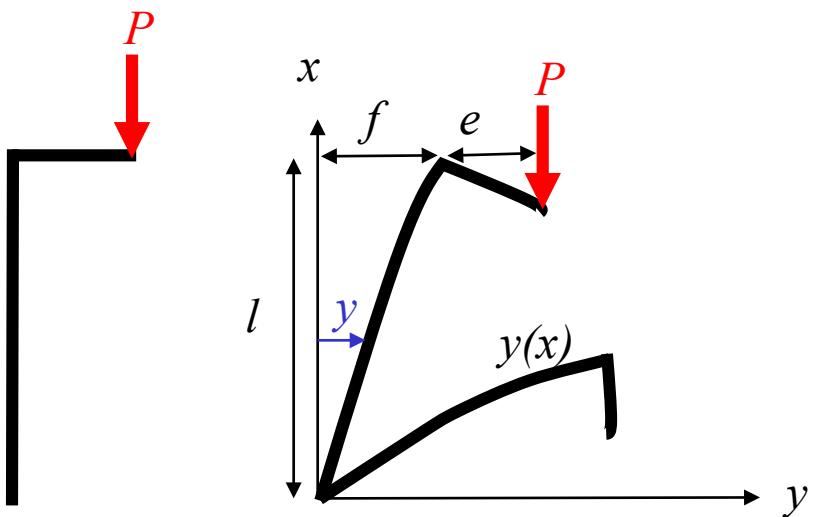


$$y'' + k^2 y = k^2 \delta$$

$$y'' + k^2 y = \frac{R}{EI} (L-x)$$

# Flambage

8



$$\left. \begin{array}{l} y'' = -\frac{M}{EI} \\ M = -P(f + e - y) \end{array} \right\} y'' = \frac{P}{EI}(f + e - y) \text{ donc } y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}(f + e)$$

La solution est une sinusoïde

$$y = e^{\left(\frac{1-\cos kx}{\cos kl}\right)}$$

$$\text{avec } k = \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}}$$

$$y \rightarrow \infty \text{ si } \cos kl = 0$$

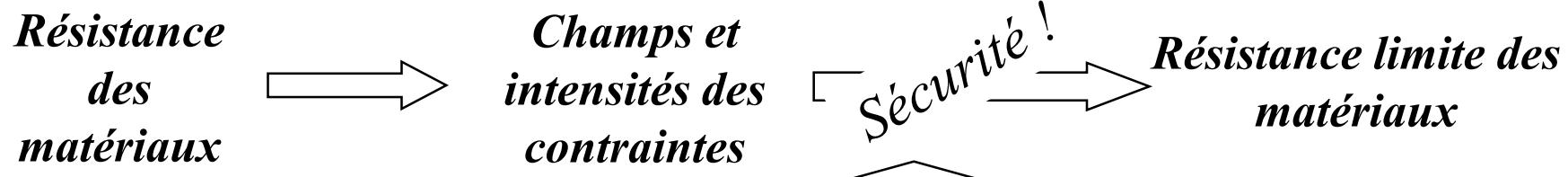
$$\Rightarrow kl = \pi/2, 3\pi/2, \dots$$

$P_c$  la charge critique qui provoque le flambage

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad \text{charge d'Euler}$$

# Sécurité

9



- Conformité aux hypothèses de la résistance des matériaux: élasticité, etc...
- Incertitudes: variations de composition, des propriétés des matériaux...
- Variations de température, d'humidité...
- Variations dans le temps : fluage, fatigue, choc, vieillissement...
- Qualité de la mise en œuvre
- Probabilité de présence de défauts
- Mécanismes d'endommagement spécifiques à chaque matériau
- Matériaux fragiles et matériaux ductiles
- ...

→ *Coefficients de sécurité*

# Coefficients de sécurité : s

10

Contraintes principales  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \longrightarrow s \cdot \sigma_1, s \cdot \sigma_2, s \cdot \sigma_3$

Approche pratique de la limite élastique :  $\sigma_{admissible} = \sigma_{élastique} / s$

Les critères de rupture essaient de prédire la fonction  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_{él}$   
à partir de tests standards de traction, compression, torsion



$$\sigma_{él.T}$$



$$\sigma_{él.C}$$



$$\tau_{él.}$$

$$\sigma_{max}$$

$$\sigma_{ultime}$$

# Critères de rupture

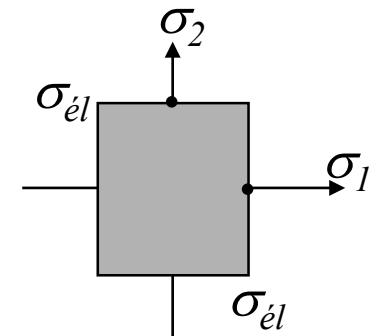
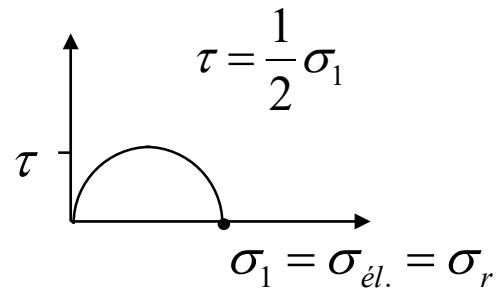
11

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_{el}$$

- Critère de la plus grande contrainte normale

$$\sup(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_{el}$$

valables pour matériaux fragiles  $\sigma_{el} \approx \sigma_{rupture}$  mais pas pour les matériaux ductiles, car



- Critère du plus grand allongement  
*idem*

# Critères de rupture

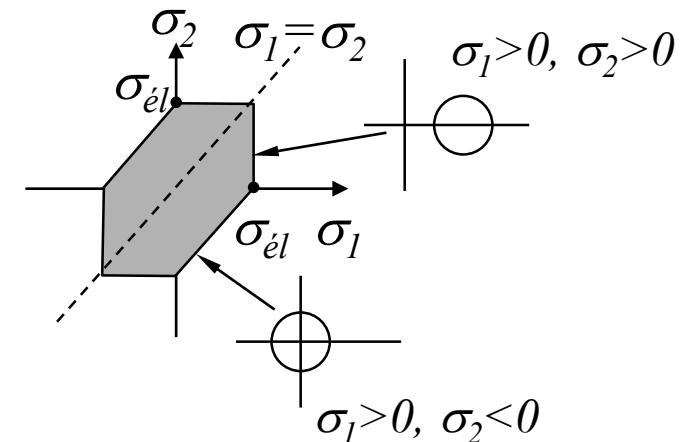
12

- Critère de la contrainte de cisaillement maximale (critère de Tresca)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (\text{Mohr})$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_e$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2\tau_{\max} = \sigma_{\text{él.}}$$



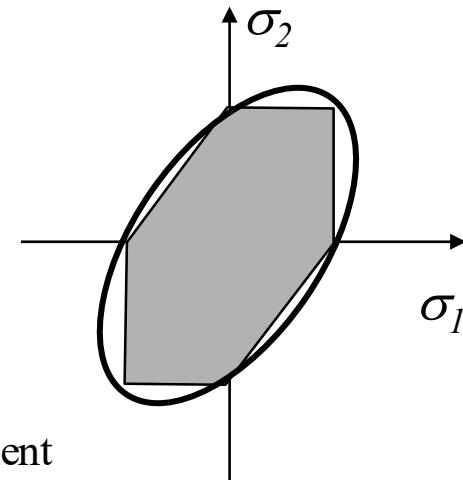
*Le critère n'est pas très fiable pour les matériaux dont  $\sigma_{\text{él.T}} \neq \sigma_{\text{él.C}}$  (fonte, béton)*

# Critères de rupture

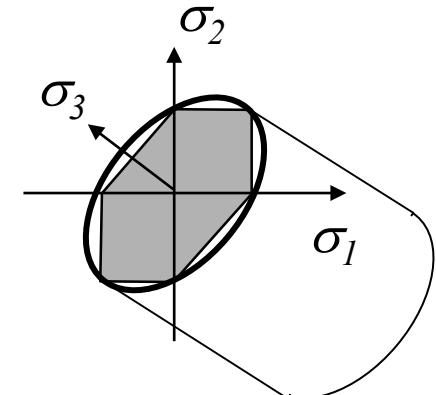
13

- Critère de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} < \sigma_{el}$$



Valide pour matériaux isotropes en traction, compression, cisaillement



# Critères de rupture

14

- Critère de von Mises pour des contraintes planes

$$\sigma_3 = 0 \Rightarrow \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_{el} \text{ une ellipse d'axe } \sigma_1 = \pm \sigma_2$$

avec la définition des contraintes principales

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R \end{cases}$$

le critère devient  $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_{el}$

par exemple pour une poutre en flexion

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \tau \end{array} \right\} \Rightarrow \text{si } \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \geq \sigma_{el} \Rightarrow \text{rupture}$$



**Cellulose**

Courbure  
en fonction  
du poids ?

**Polymères**

Taux de  
déformation des  
chaussures ?

Rigidité des  
cartilages ?

**Biomatériaux**

Résistance à la  
compression ?

**Métaux**

**Céramiques**

Contrainte de  
rupture ?

Déformations du  
matériau sous  
pression interne  
du pneu?

**Composites**

Quelles  
forces ?

**Matériaux de  
construction**

# Révision et examen B ( cf Moodle)

16

**Lundi 12 mai:** Réponses à vos questions rassemblées sur

Le fichier partagé MSE 205 ResMat, Revision, Questions :  
(avec votre adresse...@epfl.ch)

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1LHQFQ5gnNkilUtY5Z1SWU3cbkvB4aol0rhD8uIN2iBQ/edit?usp=sharing>

**Lundi 19 mai 15h15-17h examen B (2/3) en CO3**

*Vous n'avez droit à aucun document (cours, livres etc ...) autre que 1 feuille recto de vos formules et le formulaire des cas de flexion. Les calculatrices sont autorisées.*